ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS 1974

OPTION : M'

# PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

## Préambule

Une fonction numérique $\varphi$ réelle, de variable réelle, étant donnée, on appelle intervalle associé à $\varphi$ tout intervalle I de R, non réduit à un point, contenu dans le domaine de définition de $\varphi$, tel que $\varphi(I) \cap I$ ne soit pas vide et tel que la restriction de $\varphi$ à I soit continue.

L'objet du problème est la résolution, pour certaines fonctions $\varphi$ données, de l'équation fonctionnelle :

$$E(\varphi) \quad : \quad F' = F \circ \varphi$$

Un couple $(\varphi, I)$ étant donné, une fonction F réelle de variable réelle x est dite solution sur I de l'équation $E(\varphi)$ si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

(i) F est continue par $\varphi(I) \cup I$

(ii) La restriction de F à I est dérivable

(iii) $\forall x \in I \qquad F'(x) = F[\varphi(x)]$.

Si l'extrémité à droite (respectivement à gauche) de I, supposé borné, appartient à I, le symbole $F'(x)$ en un tel point x désignera la valeur de la dérivée à gauche de F en ce point (respectivement à droite).

Montrer que, quel que soit le couple $(\varphi, I)$, on peut doter l'ensemble des solutions sur I de l'équation $E(\varphi)$ d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

Les trois parties du problème sont très largement indépendantes les unes des autres (Seule la dernière question du problème fait intervenir des résultats de la partie précédente).

## Partie I

Dans cette partie, on suppose que le couple $(\varphi, I)$ possède simultanément les propriétés suivantes :

$\mathcal{H}$ :

- I est un intervalle ouvert
- $\varphi(I) = I$
- $\varphi$ est dérivable dans I
- $\forall x \in I \qquad \varphi(\varphi(x)) = x$

1°/ Montrer que toute solution sur I de l'équation E ( $\varphi$ ) est deux fois dérivable sur I et qu'elle est aussi solution sur I d'une équation différentielle E' ( $\varphi$ ) linéaire du second ordre. Que peut-on en déduire pour l'ensemble des solutions de E ( $\varphi$ ) sur l'intervalle I ?

2°/ On suppose que $\varphi$ est une fonction homographique

$$\varphi(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} \qquad (a\,d - b\,c \neq 0)$$

Déterminer les couples ( $\varphi$ , I ) satisfaisant aux conditions $\mathcal{H}$ : On montrera que

ou bien $\varphi$ est la fonction identique (premier cas)
ou bien il existe un $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \alpha - x$ (deuxième cas)
ou bien il existe un couple $(\beta, \gamma) \in \mathbf{R}^2$, $\gamma$ positif tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} - |\beta| \qquad \varphi(x) = \beta + \frac{\gamma^2}{x - \beta} \quad \text{(troisième cas)}$$

on précisera dans chaque cas les intervalles I associés aux fonctions $\varphi$.

Intégrer l'équation différentielle E' ( $\varphi$ ) dans les deux premiers cas et montrer que les solutions sur I de l'équation E ( $\varphi$ ) forment un espace vectoriel de dimension 1 dont on donnera une base.

3°/ Dans le troisième cas on utilisera le changement de variable défini par $e^t = |x - \beta|$ et on posera $|1 - 4\gamma^2| = \delta^2$ pour intégrer l'équation E' ( $\varphi$ ) (on donnera l'expression de l'intégrale générale de E' ( $\varphi$ ) ).

Montrer que pour toutes les valeurs de $\gamma$ et de $\beta$ les solutions de E ( $\varphi$ ) sur I forment un espace vectoriel de dimension 1 dont on donnera une base ; on étudiera d'abord l'hypothèse $\gamma = \frac{1}{2}$ .

## Partie II

On suppose que $\varphi$ est une application de R dans R satisfaisant aux conditions suivantes :

$\varphi$ est une application de classe $C^1$

$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \varphi'(x) > 1$

L'expression $\varphi(x) - x$ est strictement positive pour certaines valeurs de x et strictement négative pour d'autres valeurs.

.../...

3

1°/ A partir d'un nombre réel arbitraire, a , on construit la suite de terme général $x_n$ définie par les formules

$$x_0 = a$$

$$\forall n \in N \ , \quad \varphi(x_{n+1}) = x_n \ .$$

Montrer que, quel que soit a , cette suite est bien définie et qu'elle admet une limite $\ell$ .

2°/ On suppose donné le nombre a (avec $a < \ell$) et une fonction h continue sur $[a, x_1]$, montrer que si l'on pose

$$\forall x \in [x_0, x_1] \ , \qquad f_0(x) = h(x)$$

et $\forall n \geq 1 \ , \ \forall x \in [x_n, x_{n+1}] \ , \ f_n(x) = f_{n-1}(x_n) + \int_{x_n}^{x} f_{n-1}(\varphi(t))\, dt$

on définit une suite de fonctions dont le terme général est une fonction dérivable sur $[x_n, x_{n+1}]$ pour $n \geq 1$ .

Montrer qu'il existe une fonction f , continue sur $[a, \ell[$ dérivable dans $[x_1, \ell[$ et telle que pour tout n la restriction de f à l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ coïncide avec $f_n$ .
Montrer que cette fonction f est une solution de $E(\varphi)$ sur $[x_1, \ell[$ .

Montrer que f est l'unique fonction continue sur $[a, \ell[$ solution de $E(\varphi)$ sur $[x_1, \ell[$ et dont la restriction à $[a, x_1]$ coïncide avec h .

Montrer que l'application qui, à toute fonction h continue sur $[a, x_1]$ fait correspondre la solution de l'équation $E(\varphi)$ dérivable sur $[x_1, \ell[$ est linéaire.

3°/ Indiquer comment on peut construire des solutions de $E(\varphi)$ sur un intervalle $[b, \ell[$ où b est un réel arbitraire inférieur à $\ell$ .

Peut-on construire de façon analogue des solutions de $E(\varphi)$ sur un intervalle $]\ell, c]$ où c est un réel arbitraire supérieur à $\ell$ ?

4°/ On suppose $a < \ell$ et que la fonction h est à valeurs positives ou nulles. On pose

$$M = \mathrm{Sup}\ \{ h(x) \mid x \in [a, x_1] \}$$

$$\forall n \geq 0 \qquad y_n = x_{n+1} - x_n$$

Montrer que f admet pour majorant sur $[x_n, x_{n+1}]$ le nombre

$$M_n = M\,(1 + y_1)\,(1 + y_2) \ldots (1 + y_n)$$

Vérifier que $M_n \leq M\, e^{\ell - a}$ .

En déduire que f admet une limite finie à gauche au point $x = \ell$ .

Démontrer que cette propriété subsiste lorsque la fonction h continue sur $[a, x_1]$ n'est pas nécessairement à valeurs positives ou nulles.

5°/ Dans le cas particulier où $\varphi(x) = kx$ avec $k$ réel supérieur à 1 les constructions précédentes ont fourni des solutions de $E(\varphi)$ sur des intervalles $]b, 0[$ avec $b < 0$ et sur des intervalles $]0, c[$. Démontrer qu'il n'existe pas de solutions positives de $E(\varphi)$ sur $]0, +\infty[$ telles que $F(0)$ soit égal à un réel strictement positif donné $m$ ; (on pourra supposer qu'une telle fonction existe et montrer que pour $n$ entier arbitraire on a :

$$\forall x > 0 \qquad F(x) \geqslant m \sum_{p=0}^{n} k^{\frac{p(p-1)}{2}} \frac{x^p}{p!} .)$$

## Partie III

On suppose, à présent, que $\varphi$ satisfait aux hypothèses suivantes :

$\varphi$ est de classe $C^2$

$\forall x \in R \qquad \varphi'(x) > 0 \quad$ et $\quad \varphi''(x) < 0$

Il existe un réel $\ell$ tel que $\varphi(\ell) = \ell \quad$ et $\quad \varphi'(\ell) = 1$.

1°/ On définit la suite $(g_n)$ de fonctions dans $[\ell, +\infty[$ au moyen des formules

$$g_0(x) = 1$$

$$g_n(x) = 1 + \int_{\ell}^{x} g_{n-1}[\varphi(t)]\, dt$$

Démontrer que, pour tout $n$ entier positif et pour tout $x \in [\ell, +\infty[$ cette suite vérifie

$$0 \leqslant g_n(x) - g_{n-1}(x) \leqslant \frac{(x-\ell)^n}{n!}$$

En déduire que la suite $(g_n)$ converge vers une fonction $g$ continue et dérivable, solution de $E(\varphi)$ sur l'intervalle $[\ell, +\infty[$.

2°/ Soit $\lambda$ une fonction à valeurs réelles continue sur $[\ell, +\infty[$ et vérifiant

$$\forall x \in [\ell, +\infty[ \qquad \lambda(x) = \int_{\ell}^{x} \lambda[\varphi(t)]\, dt$$

Soit $\varepsilon \in ]0,1[$, montrer que la fonction $\lambda$ est nulle sur l'intervalle $[\ell, \ell+\varepsilon]$ (on pourra majorer l'intégrale définissant $\lambda(x)$, en utilisant la borne supérieure de $|\lambda|$ sur $[\ell, \ell+\varepsilon]$). Montrer ensuite que $\lambda$ est nulle sur $[\ell, +\infty[$.

En déduire que si $F$ est une solution de $E(\varphi)$ sur l'intervalle $[\ell, +\infty[$ elle est égale au produit par une constante de la fonction $g$ définie dans la question précédente.

3°/ Soit $a$ un réel arbitraire inférieur à $\ell$. Le nombre $x_1$ étant défini par $\varphi(x_1) = a$ et $h$ étant une fonction continue sur $[a, x_1]$ montrer qu'il existe une fonction $F$ et une seule continue sur $[a, +\infty[$ solution de $E(\varphi)$ sur $[x_1, +\infty[$ telle que $\forall x \in [a, x_1]$ $F(x) = h(x)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail